1. Gestão da Carteira

1.2. Teoria da Utilidade num Contexto de Incerteza

A seleção de ativos com risco envolve dois passos:

1º Delineação do conjunto de oportunidades de investimento;

2º Determinação de critérios de seleção.

Nesta análise vamos começar pelo 2º passo, ou seja, vamos apresentar o critério de seleção que determina a decisão ótima.

Função preferência e Axiomas de racionalidade

De acordo com a teoria económica da escolha num contexto de incerteza, qualquer que seja o conjunto de oportunidades que o investidor enfrente, a sua função de preferência desempenha um papel fundamental na sua decisão ótima.

Antes de vermos como, vejamos o conjunto de axiomas ou postulados estabelecido relativamente ao comportamento do investidor, também designados axiomas de racionalidade.

Axiomas de racionalidade

Os axiomas de racionalidade permitem a derivação do teorema da utilidade esperada: ordenam-se os projetos de investimento em função da sua utilidade esperada e escolhe-se aquele cujo valor é maior. Trata-se de um critério de escolha assente na maximização da utilidade esperada.

Os axiomas são os seguintes:

1. *Axioma da comparabilidade*
2. *Axioma da transitividade*
3. *Axioma da independência forte*
4. *Axioma da unicidade ou continuidade*
5. *Axioma da monotonia*
6. *Axioma de não saciedade*

1. Axioma da comparabilidade

Um investidor pode estabelecer uma ordenação entre todas as alternativas de resultado certo, isto é, o investidor é sempre capaz de comparar essas alternativas.

Se o investidor tem que escolher entre quaisquer duas alternativas de resultado certo, A e B, é sempre capaz de compará-las: pode definir uma preferência por A ou por B ou ainda uma indiferença entre ambos.

Em termos formais, o investidor é sempre capaz de dizer:

- se $A>B$, se *A* é estritamente preferido a *B*;
- *se* $B>A$, se prefere *B* a *A*; ou
- se $A \sim B$, *se A* é indiferente a *B*.

2. Axioma da transitividade

Este axioma assegura a consistência da ordenação estabelecida pelo decisor.

Formalmente,

se $A>B$ e $B>C$ então $A>C$;

e

se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$.

3. Axioma da independência

Vejamos o que se entende por lotaria/jogo/projeto.

Uma lotaria é um jogo cujos resultado é aleatório.

Representa-se por *D (A, C; p, 1-p)* a lotaria ou projeto de resultado *A* com probabilidade *p* e de resultado *C* com probabilidade *1-p*.

Se *A~B* e seja C uma alternativa de resultado certo. A independência implica que o investidor é indiferente entre os jogos seguintes:

D (A, C; p, 1-p)~E(B, C; p, 1-p).

Se *A>B* então *D (A, C; p, 1-p)> G(B, C; p, 1-p)*.

Isto significa que a ordenação de duas alternativas não é modificada quando são introduzidas numa lotaria que comporta uma terceira alternativa de resultado certo.

4.Axioma da unicidade ou continuidade (equivalente certo)

Para qualquer lotaria existe um valor (designado equivalente certo) tal que o investidor é indiferente entre a lotaria e o equivalente certo. A ideia transmitida é a de que tudo tem um preço.

Exemplo:

Se $A>B>C$, existe uma única probabilidade p tal que B é indiferente a uma lotaria de resultado A com probabilidade p e de resultado C com probabilidade $1-p$, ou seja, $B \sim D\ (A, C; p, 1-p)$. Diz-se que B é o equivalente certo de D.

5. Axioma da monotonia

Sejam as lotarias $A(C, D; p, 1-p)$ e $B(C, D; q, 1-q)$.

Se $C>D$ e $p>q$, então $A>B$.

6. Axioma de não saciedade

Qualquer investidor prefere sempre ter mais do que menos riqueza/rendimento, ou seja,

$$\forall \, \mathrm{A}, \qquad \mathrm{A} + 1 > \mathrm{A} > \mathrm{A} - 1$$

É com base nestes axiomas que é desenvolvido o teorema da utilidade esperada.

De acordo com este teorema, a forma racional de ordenar os projetos de um conjunto de oportunidades de investimento num contexto de incerteza consiste em considerar o valor esperado da utilidade de cada um. A utilidade é uma variável aleatória que depende da riqueza ou da taxa de rendimento.

O critério de escolha consiste portanto na maximização da utilidade esperada.

Teorema da utilidade esperada

Assim, o critério de escolha é dado por:

$$\underset{k}{\mathrm{Max}}\, E\left[U\left(W_i\right)\right]_k = \sum_{i=1}^{n} P_i\left(W_i\right)U(W_i)$$

com

k - contador do número de projetos em análise;

i - contador do número de rendimentos/riquezas possíveis do projeto k;

n - número de rendimentos/riquezas possíveis do projeto k;

E[U(Wi)]k - utilidade esperada da riqueza final associada ao projecto *k*;

U(Wi) - índice de utilidade associado a cada nível de riqueza final do projecto *k* ou função utilidade do indivíduo;

Pi(Wi) - probabilidade de ocorrência do nível W_i de riqueza final no projecto *k*.

Dito de outro modo,

o critério de escolha racional consiste na maximização do valor esperado de uma função utilidade que depende da riqueza (ou do rendimento), U(W) ou U(R).

Este critério ultrapassa as insuficiências do critério da maximização da riqueza esperada ou do rendimento esperado pois entra em linha de conta com o comportamento do investidor face ao risco.

Exemplo

Considere os dois seguintes projectos de investimento:

Projecto A		Projecto B	
Rendimento	Prob.	Rendimento	Prob.
w1	p	w3	q
w2	1-p	w4	1-q

Riquezas Esperadas e Utilidades Esperadas

- $E(W)A = pw1 + (1-p)w2$; $E(W)B = qw1 + (1-q)w2$

- $E[U(W)]A = pU(w1) + (1-p)U(w2)$; $E[U(W)]B = qU(w1) + (1-q)U(w2)$

As riquezas esperadas não têm em consideração o grau de dispersão da riqueza, por isso não podem ser utilizadas como critério de escolha. Deverão considerar uma medida de volatilidade. Mesmo quando esta é obtida, não é possível tomar decisões, pelo que se torna necessário utilizar o critério da utilidade esperada.

Funções utilidade

- Forma: U=U(W), W representa a riqueza no fim do período

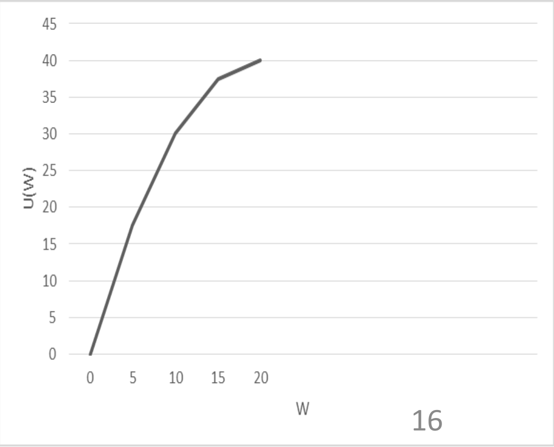
  Todas as propriedades discutidas/verificadas para U(W) também se verificam para U(R) pois Wf=Wi(1+R), onde R representa a taxa de rendimento, ou Wt=Wt-1(1+R)

- Natureza: função de utilidade cardinal (Von Neumann-Morgenstern)

$$R \to R$$
$$W \to U(W)$$

  $u.m. \to nº\ de\ utilidades\ do\ investidor\ (medida\ de\ bem\ estar)$

  Exemplo: $U(W) = 4W - 0.1W^2, W \leq 20$



Propriedade Matemática

São invariantes a transformações lineares monótonas positivas.

A escolha com base em U(W) mantém-se para:

- $U(W)+a, \forall a$
- $kU(W), k>0$

Propriedades económicas

1ª propriedade

A função utilidade é consistente com o facto dos agentes preferirem mais a menos (princípio da não saciedade).

No caso de uma função utilidade U(W) a primeira derivada é positiva ,

$$\frac{dU(W_i)}{dW_i} \rangle 0$$

isto é, trata-se de uma função utilidade crescente.

2ª propriedade

Esta propriedade é uma hipótese sobre o comportamento do investidor face ao risco. São possíveis três situações:

- O investidor é avesso ao risco;
- O investidor é neutro (indiferente) face ao risco; e
- O investidor pode ser amante do risco.

Estes três comportamentos possíveis dos investidores face ao risco podem ser definidos em função de um jogo justo (fair gamble).

Jogo justo e comportamento face ao risco

Um jogo justo é aquele em que o valor esperado do ganho é exatamente igual ao custo inerente à participação no jogo.

Assim, tem-se:

1. Aversão ao risco implica rejeição do jogo justo;
2. Neutralidade face ao risco implica indiferença em relação à escolha ou não do jogo;
3. Amante do risco implica seleção do jogo justo.

Exemplo de jogo justo

Considere-se o seguinte jogo, investir ou não investir:

Investir

Resultado	Probabilidade
2	1/2
0	1/2

Não investir

Resultado	Probabilidade
1	1

$E[\text{Investir}]=2x1/2 + 0x1/2=1=E[W]_I$

$E[\text{Não Investir}]=1x1=1=E[W]_{NI}$

É possível modelizar o comportamento dos investidores, de acordo com a respetiva aversão ao risco, da forma que a seguir se descreve.

1. Investidor com aversão ao risco

O comportamento de aversão ao risco leva à rejeição do jogo, ou seja, a utilidade esperada de não investir é maior do que a utilidade esperada de investir. Assim tem-se, sucessivamente, a desigualdade:

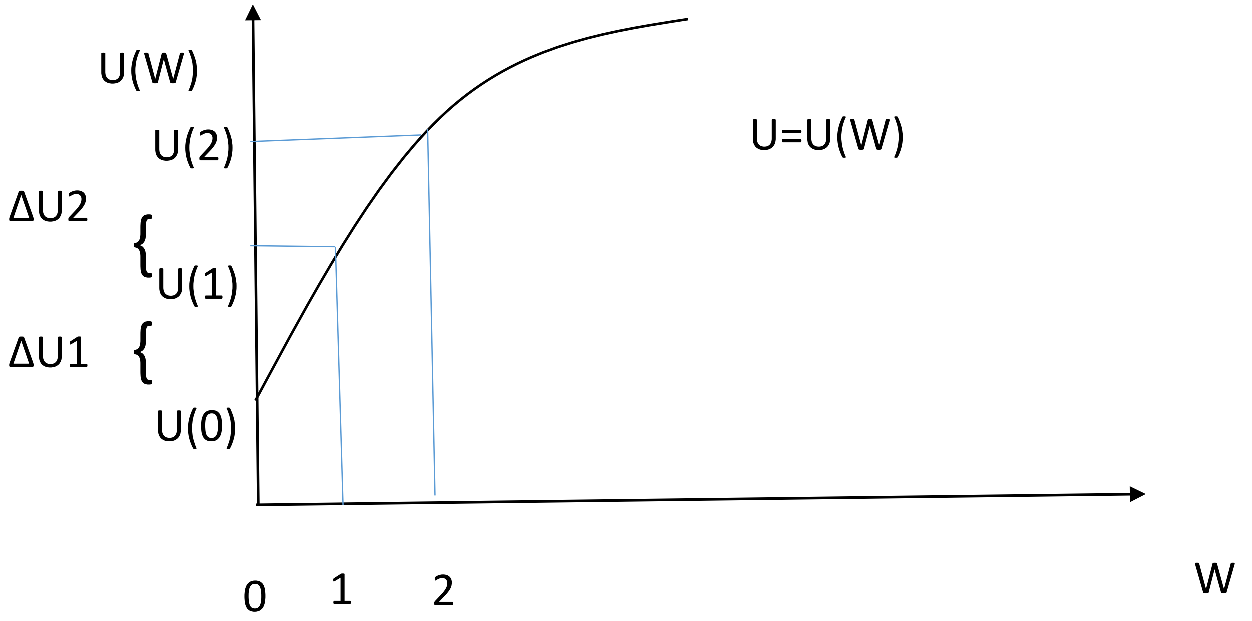
$U(1) > ½.U(2) + ½.U(0) \Leftrightarrow 2.U(1) > U(2) + U(0) \Leftrightarrow U(1) + U(1) > U(2) + U(0)$

$U(1) - U(0) > U(2) - U(1)$.

$\Delta U1 > \Delta U2$ (em termos discretos)$\Leftrightarrow$Utilidade marginal decrescente

Ou seja, um agente avesso ao risco atribui uma maior utilidade a uma variação no nível de riqueza quando esta ocorre a níveis de riqueza inferiores do que a uma variação de igual montante a um nível de riqueza superior.

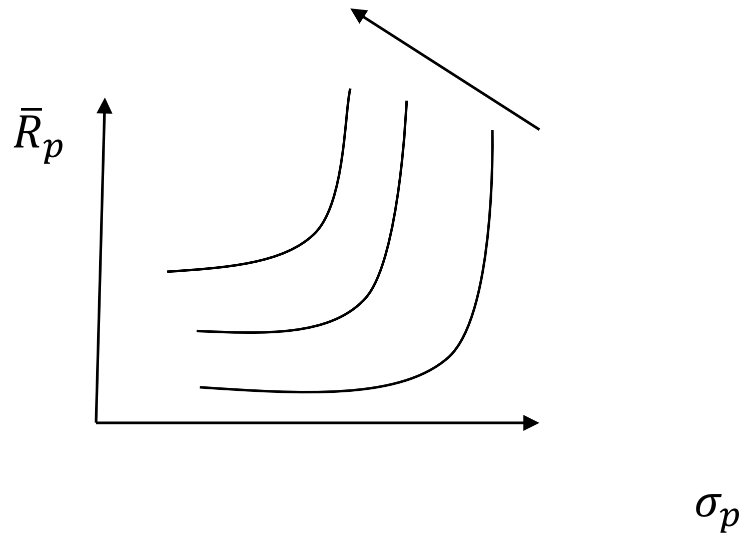
Em termos contínuos, a função utilidade tem a segunda derivada negativa, $\frac{d^2U(W)}{dW^2} \langle 0$, ou seja, é uma função côncava.



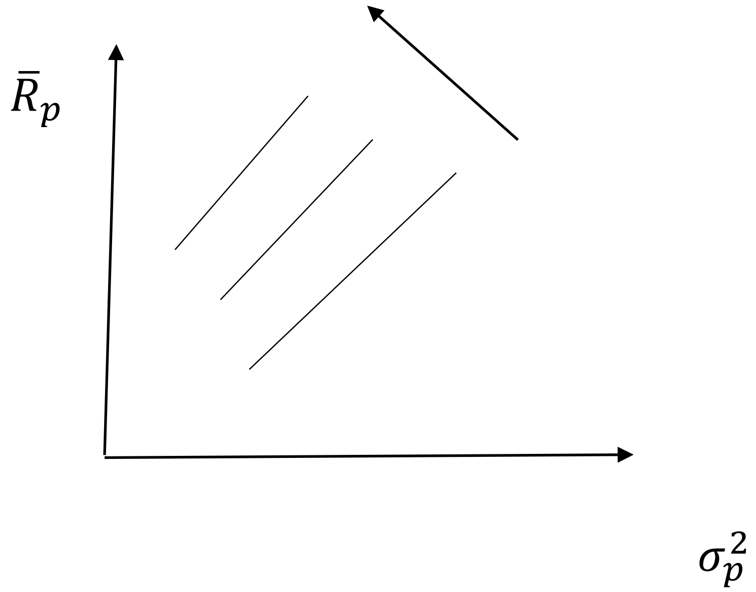
Curvas de indiferença

Demonstra-se que a família de C.I. são:

- Convexas no espaço $(\sigma_p, \bar{R}_p)$



- Lineares no espaço $(\sigma_p^2, \bar{R}_p)$

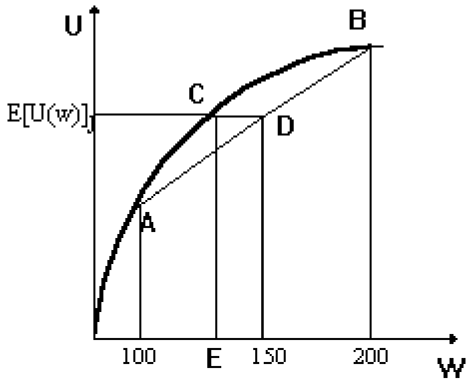


Exemplo

Seja o projecto

Wi	Probabilidade	
100	1/2	E(W)=1/2.100 +1/2.200 =150
200	1/2	E[U(W)]= ½.U(100) +1/2.U(200)

A utilidade esperada *E[U(W)]*, pode ser determinada através da reta que liga o ponto A ao ponto B, mais concretamente projetando o ponto D no eixo da utilidade.



Por outro lado, projetando o ponto D na função utilidade obtém-se o ponto C, que por sua vez projetado no eixo da riqueza, permite obter o equivalente certo, isto é, o montante E que tem uma utilidade igual à utilidade esperada do projeto. O montante E é, neste caso, inferior ao valor esperado da riqueza do projeto.

2. Investidor neutro ao risco

O comportamento de neutralidade face ao risco significa que a utilidade esperada de não investir é igual à utilidade esperada de investir. Assim tem-se, sucessivamente, a igualdade:

$U(1)= \frac{1}{2}.U(2) + \frac{1}{2}.U(0) \Leftrightarrow 2.U(1)= U(2) + U(0) \Leftrightarrow U(1) + U(1) = U(2) + U(0)$

$U(1) - U(0) = U(2) - U(1).$

Analogamente

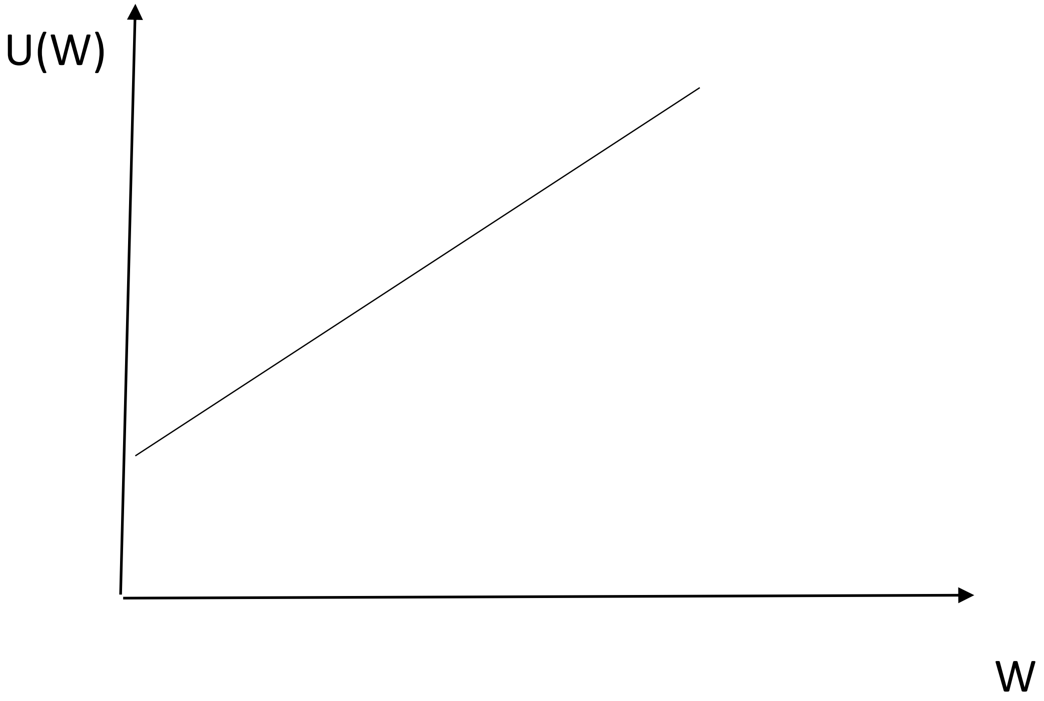
$\Delta U1= \Delta U2$ (em termos discretos)$\Leftrightarrow$Utilidade marginal constante

Neste caso, uma variação da riqueza tem sempre a mesma variação da utilidade, independentemente do nível de riqueza. .

Portanto, a função utilidade é representada por uma reta.

Em termos contínuos, a função utilidade tem a segunda derivada nula,

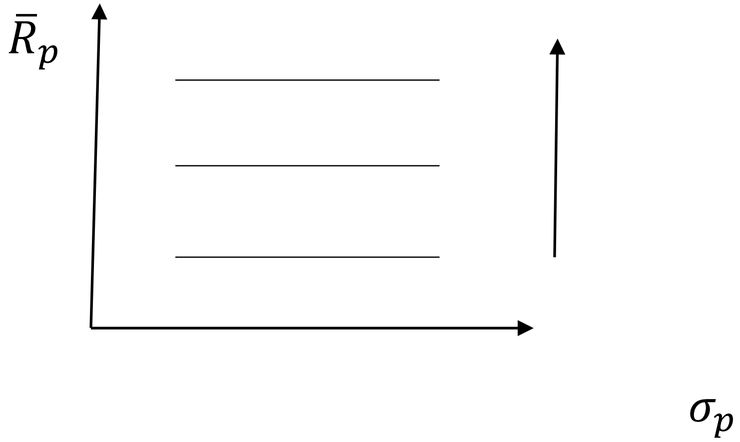
$$\frac{d^2U(W)}{dW^2} = 0 \Leftrightarrow$$ U’’(W)=0, ou seja, é uma função linear.



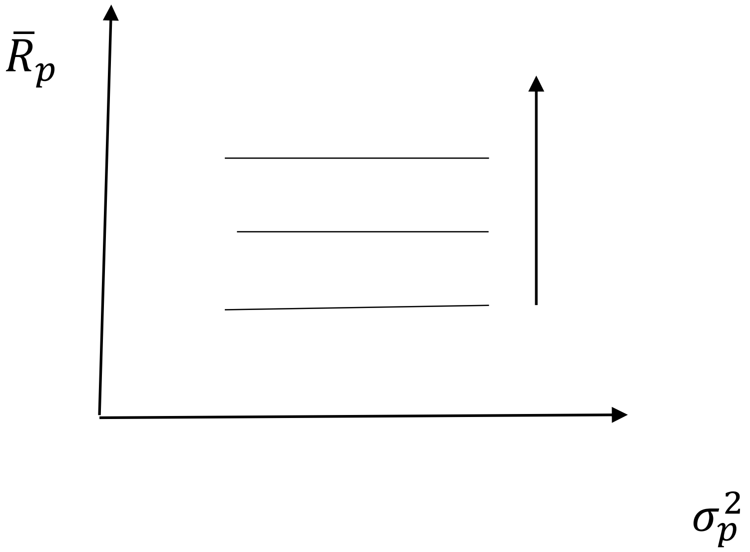
Curvas de indiferença

Demonstra-se que a família de C.I. são:

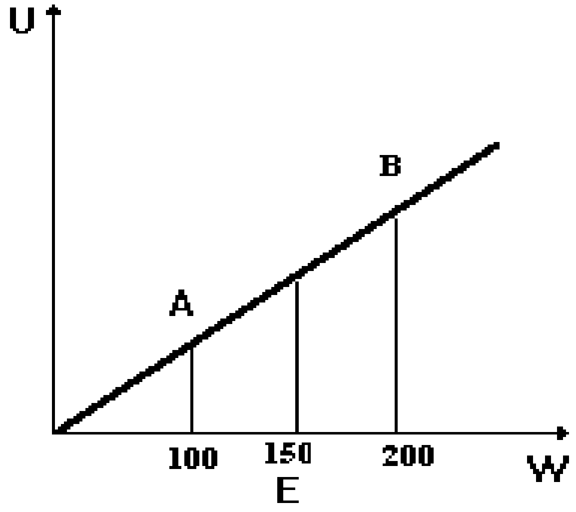
- Lineares no espaço $(\sigma_p, \bar{R}_p)$



- Lineares no espaço $(\sigma_p^2, \bar{R}_p)$



Neste caso, o equivalente certo coincide com o valor esperado do resultado do jogo.



3.Investidor amante do risco

Um investidor que seja amante do risco prefere o jogo, pelo que a utilidade esperada de investir é superior à utilidade esperada de não investir. Assim, tem-se

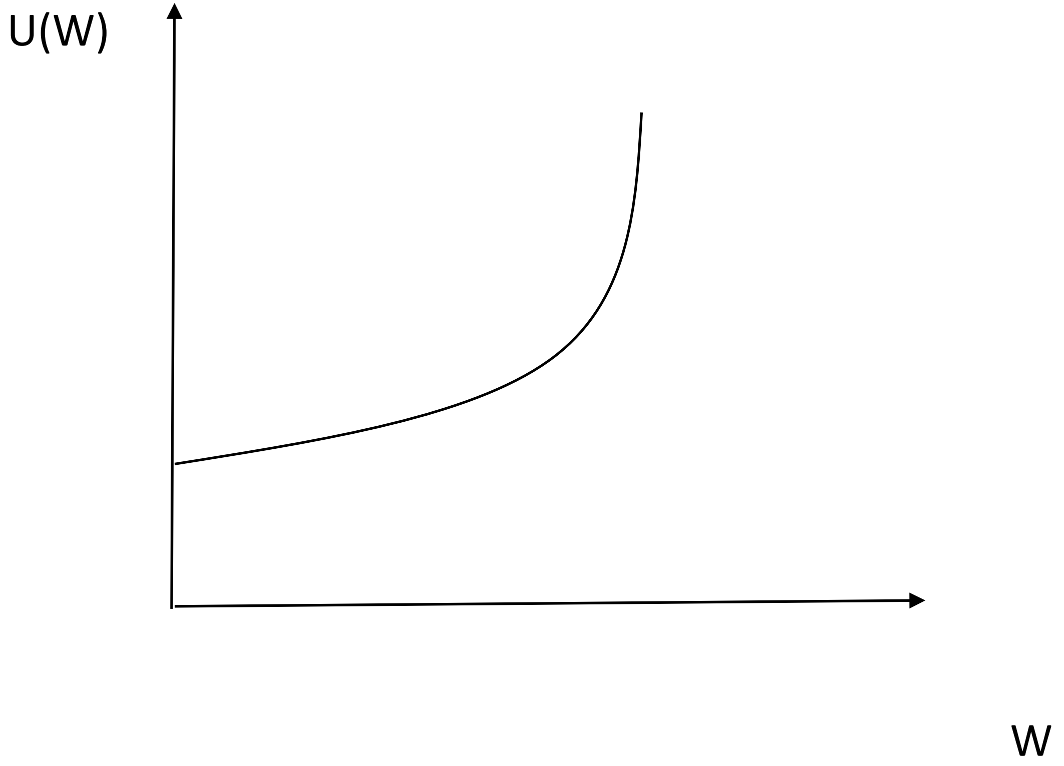
$½.U(2) + ½.U(0) > U(1) \Leftrightarrow U(2) + U(0) > 2.U(1) \Leftrightarrow U(2) + U(0) > U(1) + U(1) \Leftrightarrow$
$U(2) - U(1) = U(1) - U(0).$

Analogamente

$\Delta U2 > \Delta U1$ (em termos discretos)$\Leftrightarrow$Utilidade marginal crescente

Neste caso, uma variação unitária da riqueza é mais valorizada do que a variação unitária que a antecedeu.

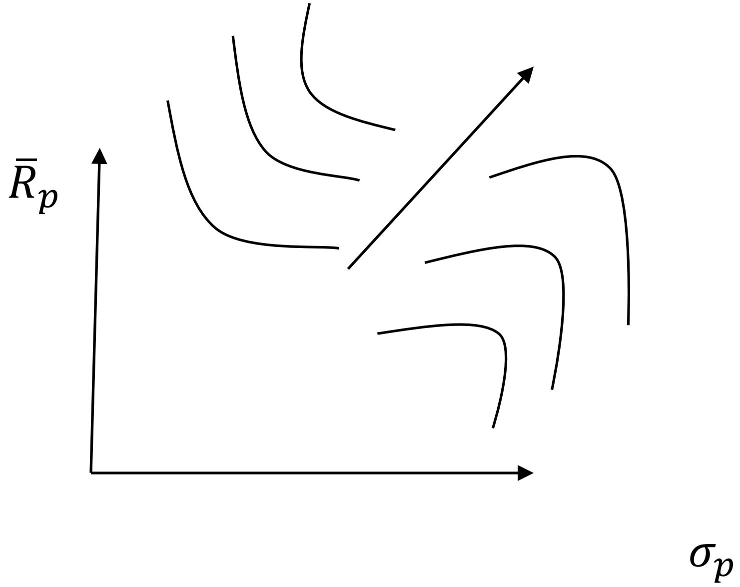
Em termos contínuos, a função utilidade tem a segunda derivada positiva, $\frac{d^2U(W)}{dW^2} > 0$, ou seja, é uma função convexa.



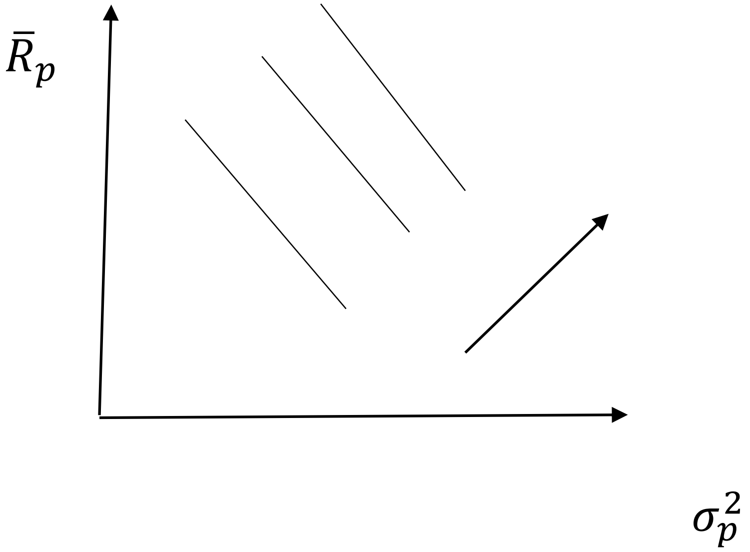
Curvas de indiferença

Demonstra-se que a família de C.I. são:

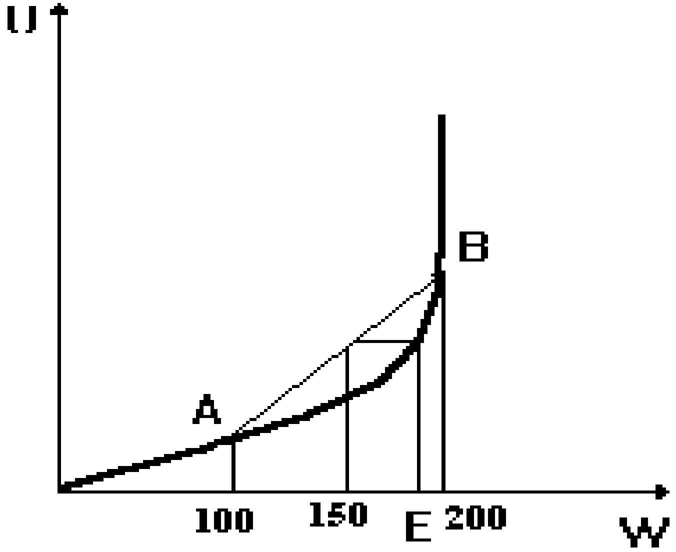
- Convexas ou côncavas no espaço $(\sigma_p, \bar{R}_p)$



- Lineares no espaço $(\sigma_p^2, \bar{R}_p)$



O equivalente certo é agora superior ao valor esperado do jogo.



Prémio de risco

O comportamento do investidor face ao risco pode ser avaliado pelo prémio de risco, π, entendido como o montante que o investidor está disposto a pagar para evitar o risco.

Trata-se de uma medida de aversão absoluta ao risco do investidor. Assim, $\pi = E(W) - W_c^*$, onde W_c^* é o equivalente certo de um projeto com risco.

$$W_c^*: \mathrm{U}(W_c^*)=\mathrm{E}[\mathrm{U}(\mathrm{W})]$$

Também é possível definir o prémio de risco como uma medida de aversão relativa ao risco: $\pi = \frac{E(W)}{W_c^*} - 1$

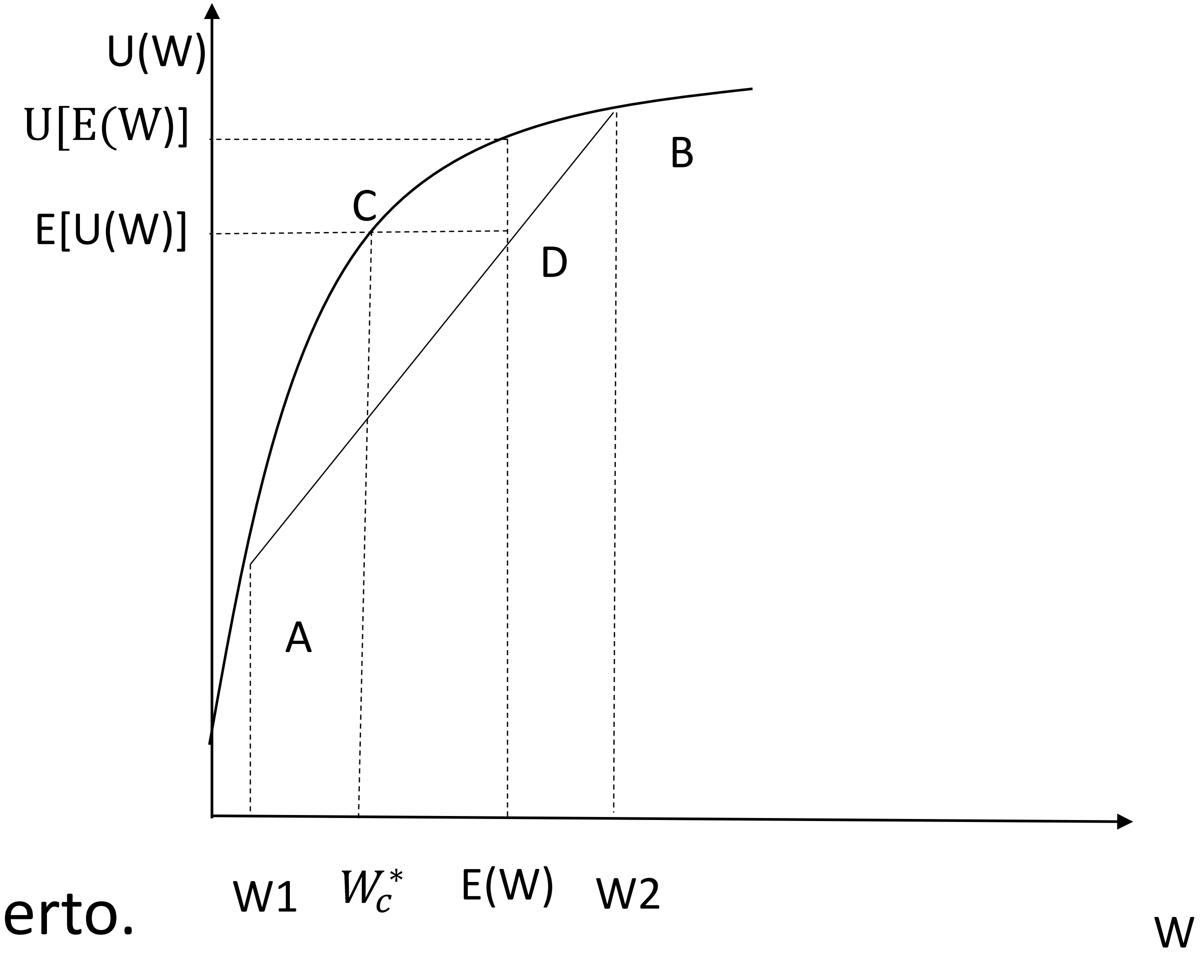
Investidor com aversão risco, $\pi > 0$

Se $W_c^* < E(W)$ então $\pi > 0$

Neste caso U[E(W)]>E[U(W)]

Riqueza esperada:
E(W)=pw1+(1-p)w2

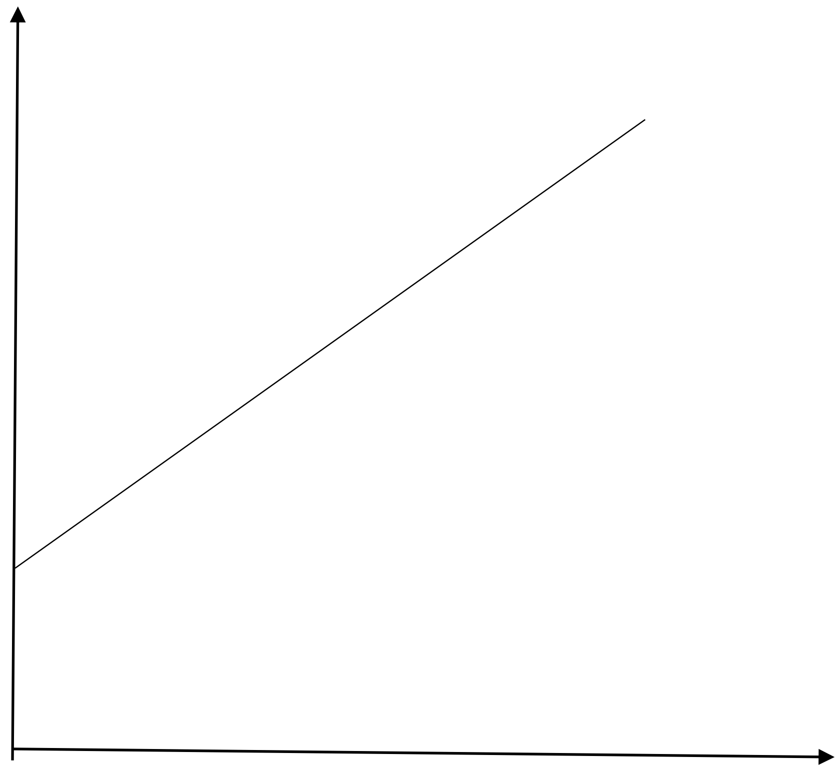
Utilidade eperada:
E[U(W)]=pU(w1)+(1-p)U(w2) é representada por D.
Projetando D na curva de utilidade, obtemos o ponto C que projetado no eixo W permite obter o equivalente certo.



Investidor neutro ao risco, $\pi = 0$

Se $W_c^* = E(W)$ então $\pi = 0$

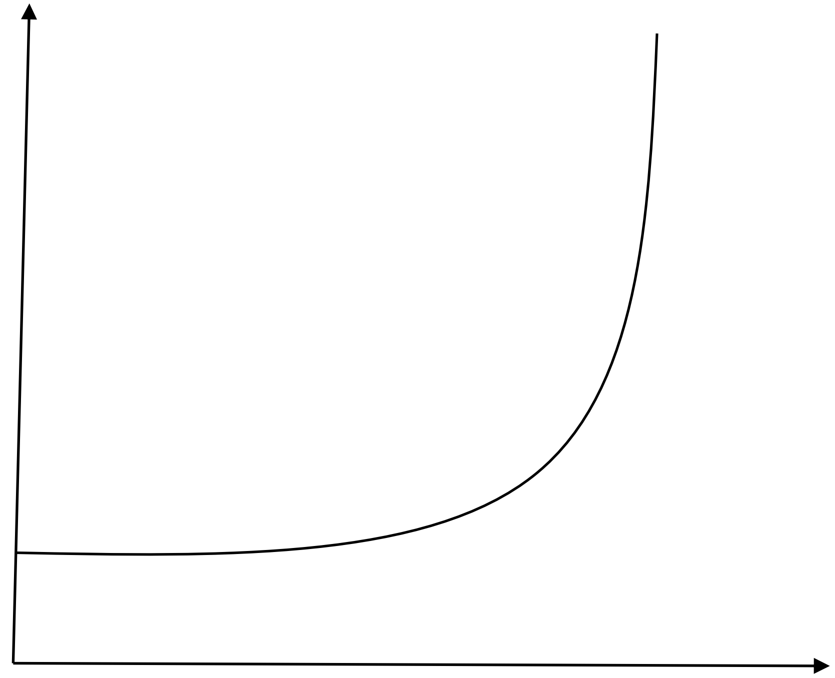
Neste caso U[E(W)]=E[U(W)]



Investidor amante do risco, $\pi < 0$

Se $W_c^* > E(W)$ então $\pi < 0$

Neste caso U[E(W)]<E[U(W)]



3ª Propriedade

Esta propriedade das funções utilidade é uma hipótese sobre a alteração das preferências do investidor resultante de variações absolutas da riqueza.

Para determinarmos a variação do investimento em ativos com risco induzida pela variação da riqueza, é necessário introduzir uma medida de aversão absoluta ao risco.

Essa medida é dada por

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

Onde U´(W) e U´´(W) são a 1ª e a 2ª derivadas da função utilidade da riqueza.

Relativamente à aversão absoluta ao risco são possíveis três comportamentos:

- Se o investidor aumenta o montante investido em ativos com risco quando a sua riqueza aumenta, então o investidor exibe uma aversão absoluta ao risco decrescente;
- Se o investidor mantém o montante investido em ativos com risco quando a sua riqueza aumenta, então o investidor tem uma aversão absoluta ao risco constante;
- Se o investidor diminui o montante investido em ativos com risco quando a sua riqueza aumenta, então o investidor exibe uma aversão absoluta ao risco crescente.

Sendo A(W) a medida de aversão absoluta ao risco do investidor, uma medida de como a aversão absoluta ao risco se comporta face a alterações da riqueza é dada pela sua primeira derivada em relação à riqueza,

$$\frac{dA(W)}{dW} = A'(W)$$

.

Assim sendo, os seguintes resultados podem ser obtidos:

Se $A'(W)>0$, a aversão absoluta ao risco é crescente;

Se $A'(W) = 0$, a aversão absoluta ao risco é constante;

Se $A'(W)<0$, a aversão absoluta ao risco é decrescente.

Exemplo

Seja a seguinte função utilidade $U(W) = aW - bW^2$, com a, b>0 e $W \le (a/2b)$.
Ter-se-á

$$U'(W) = a - 2bW > 0$$

$$U''(W) = -2b < 0$$

$$A(W) = \frac{2b}{a - 2bW}$$

$$A'(W) = \frac{4b^2}{(a - 2bW)^2} > 0$$

Conclusão: o investidor revela uma aversão absoluta ao risco crescente.

Síntese

Condição	Definição	Propriedade de A´(W)	Exemplo de função utilidade
Aversão absoluta ao risco crescente	À medida que a riqueza aumenta, o investidor diminui o montante investido em ativos com risco	A'(W)>0	U(W)= W^{-cW^2}
Aversão absoluta ao risco constante	À medida que a riqueza aumenta, o investidor mantém o montante investido em ativos com risco	A'(W) = 0	U(W)= $-e^{-cw}$
Aversão absoluta ao risco decrescente	À medida que a riqueza aumenta, o investidor aumenta o montante investido em ativos com	A'(W)<0	U(W)=lnW

4ª Propriedade

Esta propriedade assenta numa hipótese sobre a alteração da percentagem de riqueza investida em ativos com risco à medida que a riqueza aumenta. Existem igualmente três situações possíveis:

- Se a percentagem de riqueza investida em ativos com risco aumenta quando a riqueza aumenta, então o investidor exibe uma aversão relativa ao risco decrescente.
- Se a percentagem de riqueza investida em ativos com risco se mantém constante quando a riqueza aumenta, o investidor exibe uma aversão relativa ao risco constante.
- Se a percentagem de riqueza investida em ativos com risco diminui quando a riqueza aumenta, o investidor exibe uma aversão relativa ao risco crescente.

Uma medida da aversão relativa ao risco é dada por

$$\mathrm{R(W)} = -\frac{WU''(W)}{U'(W)}$$

A primeira derivada de R(W) em ordem a W indica o comportamento de aversão relativa ao risco resultante de uma alteração da riqueza, pelo que se podem verificar as seguintes situações:

- Se R'(W)< 0 a função utilidade exibe uma aversão relativa ao risco decrescente;
- Se R'(W) = 0 a função utilidade exibe uma aversão relativa ao risco constante;
- Se R'(W) > 0 a função utilidade exibe uma aversão relativa ao risco crescente.

Exemplo

Considerando a função de utilidade usada no exemplo anterior, tem-se

$$R(W) = \frac{2bW}{a - 2bW}$$

$$R'(W) = \frac{2ba}{(a - 2bW)^2} > 0$$

o que corresponde a um investidor com uma aversão relativa ao risco crescente.

Síntese

Condição	Definição	Propriedade de A´(W)	Exemplo de função utilidade
Aversão relativa ao risco crescente	À medida que a riqueza aumenta, o investidor diminui a percentagem investida em ativos com risco	R'(W)>0	U(W)= $W - bW^2$, b>0
Aversão relativa ao risco constante	À medida que a riqueza aumenta, o investidor mantém a percentagem investida em ativos com risco	R'(W) = 0	U(W)=lnW
Aversão relativa ao risco decrescente	À medida que a riqueza aumenta, o investidor aumenta a percentagem investida em ativos com	R'(W)<0	U(W)= $-e^{-2W^{-\frac{1}{2}}}$

Conclusão

- Em geral, aceita-se que os investidores têm $A'(W)<0$, isto é, têm aversão absoluta ao risco decrescente.

- Em geral, aceita-se (embora de forma menos consensual) que os investidores têm $R'(W)=0$, isto é, têm aversão relativa ao risco constante.

Funções utilidade

- Quadrática: U(W)= $aW - bW^2$, com a, b>0 e W $\leq \frac{a}{2b}$

- Potência: $\mathrm{U(W)} = \frac{W^b}{b}, 0 < b < 1$

- Logarítmica: $\mathrm{U(W) = a + blnW,\ \ b > 0}$

- Exponencial: $\mathrm{U(W)} = -\frac{1}{a}e^{-aW}, \mathrm{a} > 0$